

DOI: 10.16285/j.rsm.2021.0922

# 基于混合常应力-光滑应变单元的极限分析方法

周锡文<sup>1</sup>, 刘锋涛<sup>2</sup>, 戴北冰<sup>3</sup>, 张澄博<sup>1</sup>, 张金鹏<sup>1</sup>

(1. 中山大学 地球科学与工程学院, 广东 广州 510275; 2. 桂林理工大学 土木与建筑工程学院, 广西 桂林 541004;  
3. 中山大学 土木工程学院, 广东 广州 510275)

**摘 要:** 极限分析是岩土工程稳定性评价的重要方法之一。传统的有限元极限分析方法, 采用低阶三角形单元时需要引入速度间断面并采用特殊网格布局, 或者采用高阶三角形单元等措施来克服体积锁定问题和提高数值精度。在光滑有限元法 (smoothed finite element method, 简称 SFEM) 的基础上, 提出了一种基于新型混合常应力-光滑应变单元的极限分析方法 (mixed constant stress-smoothed strain element limit analysis, 简称 MCSE-LA 方法)。在服从关联流动法则和 Mohr-Coulomb 屈服准则的基础上, MCSE-LA 方法最终将数值极限分析转化为以应力和极限荷载乘子为基本未知量的二阶锥规划 (second order cone programming, 简称 SOCP) 问题。MCSE-LA 方法具有形式简单、优化变量相对较少和无需显式的写出塑性内能耗散函数的优点, 并且根据凸锥优化的对偶理论, 可以从对偶问题中获得速度场和塑性乘子等信息。此外, 还采用基于最大塑性剪应变率的网格自适应加密算法, 该算法在塑性区细化网格, 显著提高了新数值极限分析方法的计算效率和精度。最后通过边坡稳定分析的结果对比, 验证了 MCSE-LA 方法的计算精度和效率均高于传统的有限元极限分析方法。

**关 键 词:** 数值极限分析; 常应力-光滑应变混合单元; 二阶锥规划; 自适应网格加密

中图分类号: TU431

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2022) 06-1660-11

## Limit analysis method based on mixed constant stress-smoothed strain element

ZHOU Xi-wen<sup>1</sup>, LIU Feng-tao<sup>2</sup>, DAI Bei-bing<sup>3</sup>, ZHANG Cheng-bo<sup>1</sup>, ZHANG Jin-peng<sup>1</sup>

(1. School of Earth Sciences and Engineering, Sun Yat-Sen University, Guangzhou, Guangdong 510275, China;

2. College of Civil Engineering and Architecture, Guilin University of Technology, Guilin, Guangxi 541004, China;

3. School of Civil Engineering, Sun Yat-Sen University, Guangzhou, Guangdong 510275, China)

**Abstract:** Limit analysis approach is one of the classical methods for the stability evaluation of geotechnical infrastructures. Low-order triangular elements with velocity discontinuities and special layout of mesh, or high-order triangular elements are usually used to overcome the volumetric locking problem encountered in the traditional finite-element upper bound limit analysis. However, the accuracy of this method depends heavily on the layout of discontinuities. In this study, a mixed constant stress-smoothed strain element is proposed to discretize the constrained functional of generalized variational principle, and a novel method of mixed constant stress-smoothed strain element limit analysis (MCSE-LA) is established for limit analysis. Following the associated flow rule and Mohr-Coulomb yield criterion, the novel MCSE-LA is finally converted to a second order cone programming (SOCP) that contains only stress variables and limit load multiplier. The MCSE-LA method has a simple representation form, and relatively few optimization variables, and in particular, there is no need for an explicit plastic internal energy dissipation function. Based on the duality of the convex optimization, the optimal velocity field and plastic multiplier can be solved in the dual problem simultaneously. Moreover, an adaptive mesh refinement algorithm is proposed based on the maximum plastic shear strain rate. This algorithm could refine the mesh in the plastic zone and significantly improve the computational efficiency and accuracy of the proposed method. Finally, by a comparative analysis of the slope stability problem, the proposed MCSE-LA method is verified to have higher computational accuracy and efficiency compared with the traditional finite-element limit analysis.

**Keywords:** numerical limit analysis; mixed constant stress-smoothed strain element; second order cone programming; adaptive mesh refinement

收稿日期: 2021-06-21

修回日期: 2022-02-28

基金项目: 广东省自然科学基金 (No.2018A030313897); 国家自然科学基金 (No.52078507); 广州市科技计划项目 (No.201707010082, No.202002030195)。

This work was supported by the Guangdong Natural Science Foundation (2018A030313897), the National Natural Science Foundation of China (52078507) and the Science and Technology Program of Guangzhou City (201707010082, 202002030195).

第一作者简介: 周锡文, 男, 1997 年生, 硕士研究生, 主要从事岩土工程数值计算方法研究。E-mail: zhouxw26@mail2.sysu.edu.cn

通讯作者: 刘锋涛, 男, 1979 年生, 博士, 讲师, 主要从事岩土工程数值计算方法研究。E-mail: celiuft@glut.edu.cn

## 1 引言

极限分析法是岩土工程稳定性分析的重要方法之一,它以塑性力学上限和下限定理为理论基础<sup>[1]</sup>,分别从静力许可应力场和运动许可速度场出发,给出结构极限状态解的下限和上限。Chen<sup>[2]</sup>系统地阐述了极限分析的基本原理及其在评价边坡稳定性和计算地基、挡土墙极限承载力中的应用。

由于解析方法的局限性,目前已经提出了基于有限元单元法<sup>[3-5]</sup>、边界元法<sup>[6-7]</sup>、非连续面拓扑优化方法<sup>[8-9]</sup>、自然单元法<sup>[10]</sup>、无单元伽辽金法<sup>[11]</sup>和光滑有限元法<sup>[12]</sup>等多种数值极限分析方法。在这些数值计算方法中,有限元极限分析法是提出较早、相对成熟的方法之一,特别是在结合凸锥规划算法<sup>[3-4, 13]</sup>的有限元极限分析方法提出之后,可以采用高效的原对偶内点算法<sup>[14-15]</sup>或投影收缩算法<sup>[16-18]</sup>等求解,使得这一方法可以在更为广泛的领域内应用。

在有限元极限分析法中,低阶单元(如三节点常应变单元)由于其简单、高效的特点往往是数值方法的首要选择。然而,三节点常应变单元面临着体积锁定和精度低的问题。为改善此类单元的性能,Sloan等<sup>[19]</sup>提出了基于不连续速度场的极限分析上限法。不连续速度场方案虽然简单有效,但它的精度却依赖于不连续速度场间断面的布局。因此,基于高阶有限单元的极限分析方法逐渐引起了关注<sup>[3, 20]</sup>,Makrodimopoulos等<sup>[3]</sup>证明了六节点的线性应变单元不仅可以克服体积锁定,还可以获得严格的上限解。

光滑有限元法(SFEM)<sup>[21]</sup>的发展为克服低阶单元的体积锁定和精度低的问题提供了一个新的途径<sup>[12, 22-23]</sup>。SFEM由Liu等<sup>[21]</sup>将基于应变光滑技术的稳定节点积分方案<sup>[24]</sup>引入到传统有限元中发展而来<sup>[21, 25-26]</sup>,如基于边的光滑有限元法<sup>[26]</sup>(edge-based smoothed FEM, ESFEM)、基于点的光滑有限元法<sup>[27]</sup>(node-based smoothed FEM, NSFEM)、基于元胞的光滑有限元法<sup>[28]</sup>(cell-based smoothed FEM, CSFEM)和它们的改进方案<sup>[29-32]</sup>。在各类SFEM中,ESFEM具有高精度和超收敛的优点<sup>[21, 26]</sup>。然而,ESFEM仍旧面临体积锁定的问题。为此,Wu等<sup>[29]</sup>提出了基于两级网格划分方案的边光滑有限元法(selective ESFEM, sESFEM),采用两级网格划分的方式使总体问题自由度和不可压缩条件约束个数的比值达到最优<sup>[29]</sup>,以此克服不可压缩条件下的体积锁定问题。该方案简单有效,

在继承ESFEM高精度、超收敛的优点的同时,完全克服了体积锁定问题。

另一方面,上限解还可以采用常应力-线性速度的混合单元<sup>[33-34]</sup>的数值极限分析法获得。Krabbenhoft等<sup>[35]</sup>进一步根据凸规划的对偶理论<sup>[36]</sup>证明了基于静力平衡方程弱形式的 $\alpha \rightarrow \max$ 方法与基于速度场的 $\alpha \rightarrow \min$ 方法都可以求得结构破坏的严格上限解。与 $\alpha \rightarrow \min$ 方法相比, $\alpha \rightarrow \max$ 方法具有变量少、形式简洁的优点,在该方法中需要用到同时插值应力和速度的混合单元<sup>[13, 35]</sup>。为进一步提高计算精度、效率和克服体积锁定等问题,本文结合sESFEM提出了一种新型混合常应力-光滑应变单元,即速度场采用三节点单元线性插值;应力场和光滑应变场为以光滑域为基本单位的分片常量场。此类新单元具有以下特点:在继承低阶单元高效优点的同时,可以克服体积锁定问题;变量少、适用于复杂本构模型;能同时求出极限状态下的应力场、速度场以及破坏模式。

此外,由于塑性变形的局部性,采用均匀网格加密时,极限分析数值解精度低、收敛缓慢<sup>[37-38]</sup>。因此,自适应网格加密对于极限分析是十分必要的。为此,文中在塑性耗散量<sup>[12, 39]</sup>的后验误差估计指标的基础上,提出了应用于混合常应力-光滑应变单元的自适应算法。数值结果表明,该自适应加密方式能显著提高数值精度和收敛速度。

## 2 计算原理

### 2.1 极限分析的广义变分原理

考虑理想刚塑性体 $\Omega$ ,其边界 $S$ 由速度边界 $S_u$ 和应力边界 $S_\sigma$ 构成,并满足 $S_u \cup S_\sigma = S$ 和 $S_u \cap S_\sigma = \emptyset$ 。极限分析的控制方程可以表述为

$$\left. \begin{aligned} \nabla^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}_0 + \alpha \mathbf{b} &= \mathbf{0}, \quad \text{in } \Omega \\ \mathbf{N} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{t}_0 + \alpha \mathbf{t}, \quad \text{on } S_\sigma \\ \nabla \dot{\mathbf{u}} &= \lambda \nabla_\sigma F(\boldsymbol{\sigma}) \\ F(\boldsymbol{\sigma}) &\leq 0, \lambda \geq 0, \lambda F(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: $\nabla$ 为梯度算子; $\boldsymbol{\sigma}$ 为应力; $\dot{\mathbf{u}}$ 为速度; $\lambda$ 为非负塑性乘子; $\mathbf{N}$ 为应力边界的外法线方向向量矩阵; $\mathbf{b}_0$ 和 $\mathbf{t}_0$ 为初始不变外力荷载; $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{t}$ 为可变外力荷载; $\alpha$ 为极限荷载乘子,即当可变外力荷载按比例加载到原来的 $\alpha$ 倍后,结构进入极限状态。

根据极限分析广义变分原理,结构极限状态下的控制方程组(1)等价于以下约束变分问题的驻值条件,即<sup>[13]</sup>

$$\left. \begin{aligned} & \min_{\hat{\mathbf{u}}} \max_{\alpha, \sigma} \alpha + \int_{\Omega} \sigma^T \nabla \hat{\mathbf{u}} d\Omega - \\ & \quad \alpha \left( \int_{S_{\sigma}} \mathbf{t}^T \hat{\mathbf{u}} dS + \int_{\Omega} \mathbf{b}^T \hat{\mathbf{u}} d\Omega \right) - \\ & \quad \left( \int_{S_{\sigma}} \mathbf{t}_0^T \hat{\mathbf{u}} dS + \int_{\Omega} \mathbf{b}_0^T \hat{\mathbf{u}} d\Omega \right) \\ & \text{s.t.} \quad F(\sigma) \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

考虑一般有限元离散, 应力场和位移场可以表述为

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N}_u \hat{\mathbf{u}}, \quad \sigma = \mathbf{N}_{\sigma} \hat{\sigma}, \quad \nabla \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{B}_u \hat{\mathbf{u}} \quad (3)$$

式中:  $\mathbf{B}_u = \nabla \mathbf{N}_u$  为应变梯度矩阵;  $\hat{\sigma}$ 、 $\hat{\mathbf{u}}$  分别为单元节点应力向量和位移向量。将式 (3) 代入式 (2) 后可以得到

$$\left. \begin{aligned} & \min_{\hat{\mathbf{u}}} \max_{\alpha, \sigma} \alpha + \hat{\sigma}^T \mathbf{B}_u \hat{\mathbf{u}} - \alpha \mathbf{F}^T \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{F}_0^T \hat{\mathbf{u}} \\ & \text{s.t.} \quad F(\sigma) \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_{\sigma}^T \mathbf{B}_u d\Omega \\ \mathbf{F}_0 &= \int_{S_{\sigma}} \mathbf{N}_u^T \mathbf{t}_0 dS + \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \mathbf{b}_0 d\Omega \\ \mathbf{F} &= \int_{S_{\sigma}} \mathbf{N}_u^T \mathbf{t} dS + \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \mathbf{b} d\Omega \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

对式 (4) 中  $\hat{\mathbf{u}}$  求变分, 得到

$$\mathbf{B}^T \hat{\sigma} = \mathbf{F}_0 + \alpha \cdot \mathbf{F} \quad (6)$$

则式 (2) 进一步表示为

$$\left. \begin{aligned} & \max \quad \alpha \\ & \text{s.t.} \quad \mathbf{B}^T \hat{\sigma} = \mathbf{F}_0 + \alpha \cdot \mathbf{F} \\ & \quad F(\sigma) \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

根据文献[35]的研究, 式 (7) 也可以获得严格的上限解, 其中第 1 个约束方程是平衡方程的弱形式。而在传统基于速度场的上限法中, 对于不同的屈服准则需要事先确定与之对应的塑性耗散函数<sup>[12]</sup>, 并且需要在整个问题域内满足流动法则的约束, 这往往会导致高阶单元等复杂单元无法得到严格上限解。然而在式 (7) 中除平衡方程的弱形式之外, 仅有屈服准则的约束, 不仅变量相对较少且无流动法则的约束。

另外, 采用原对偶内点算法求解优化问题 (7) 时, 式 (7) 的原问题和对偶问题转换为齐次模型进行求解<sup>[14]</sup>, 其极值条件构成了式 (1) 中的基本控制方程<sup>[13, 35, 40]</sup>, 并且式 (7) 的对偶问题和基于速度场的上限法是等价的<sup>[35]</sup>。因此, 速度场和塑性乘

子的信息可从式 (7) 的对偶解中获得。

## 2.2 混合常应力-光滑应变单元

光滑有限元法<sup>[12]</sup>的离散过程中, 首先在离散域内构造不同形式的应变光滑区域。假设问题域由有限  $N_s$  个互不重叠的光滑域组成, 第  $k$  个光滑域由内部区域  $\Omega_k^s$  和边界  $\Gamma_k^s$  组成, 如图 1(b) 所示, 则光滑域内的光滑应变为

$$\tilde{\epsilon}_k = \frac{1}{A_k^s} \int_{\Omega_k^s} \epsilon(\mathbf{x}) d\Omega = \frac{1}{A_k^s} \int_{\Omega_k^s} \nabla \hat{\mathbf{u}} d\Omega, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_k^s \quad (8)$$

式中:  $\tilde{\epsilon}_k$  为光滑应变张量;  $\epsilon(\mathbf{x}) = \nabla \hat{\mathbf{u}}$  为相容应变张量;  $\mathbf{x}$  为空间坐标矢量;  $A_k^s$  为光滑  $k$  的面积。

将式 (3) 代入式 (8), 并采用散度定理可将式 (8) 中的体积积分转化为光滑域边界上的面积分, 即

$$\tilde{\epsilon}_k = \frac{1}{A_k^s} \int_{\Gamma_k^s} \mathbf{L}_n(\mathbf{x}) \mathbf{N}_u \hat{\mathbf{u}} d\Gamma = \mathbf{B}_k^s \hat{\mathbf{u}} \quad (9)$$

式中:  $\mathbf{L}_n(\mathbf{x})$  为光滑域边界单位外法线矩阵;  $\mathbf{B}_k^s$  为光滑应变梯度矩阵<sup>[22]</sup>。光滑应变的具体表达式则取决于光滑域的类型和特点。sESFEM<sup>[22]</sup>采用了所谓的两极网格划分方案, 如图 1(a)、1(b) 所示。一级网格指离散问题域的三角形网格 (见图 1(a)); 二级网格在一级网格的基础上, 将每个三角形单元沿重心细分为 3 个子三角形单元 (见图 1(b))。然后, 依据一级网格的每条边划分基于边的光滑域, 第  $k$  条边所在的光滑域由与其相邻的两个子三角形组成, 如图 1(b)、1(d) 所示。基于 sESFEM 的光滑应变为<sup>[22]</sup>

$$\tilde{\epsilon}_k = \frac{1}{A_k^s} \sum_{i=1}^N A_i \epsilon_i = \mathbf{B}_k^s \hat{\mathbf{u}} \quad (10)$$

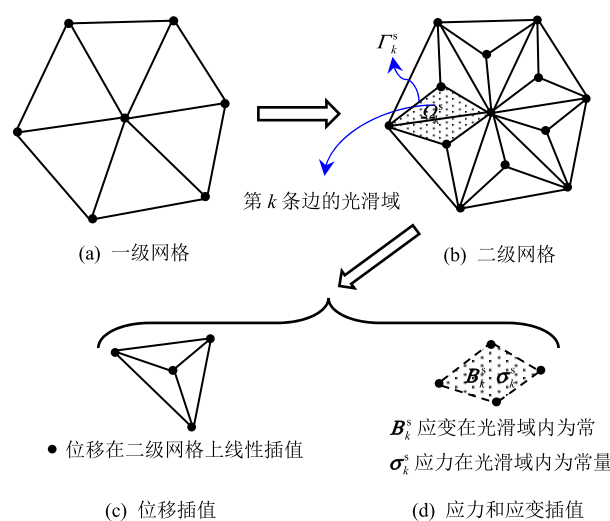


图1 基于 sESFEM 的混合常应力-光滑应变单元  
Fig.1 Mixed constant stress-smoothed strain element based on the sESFEM

式中:  $N=1$  或  $2$ , 为组成第  $k$  个光滑域的子三角形单元的个数。

本文在 sESFEM 的基础上, 将常应力场引入到光滑域中, 即认为在光滑域内的应力变量为常数, 即

$$N_\sigma \hat{\sigma} = \hat{\sigma} = \sigma_k = \text{constant} \quad (11)$$

因此, 在光滑域内离散应力场的形函数为单位矩阵, 即  $N_\sigma = \mathbf{I}$ 。速度场采用二级网格上的三节点单元进行线性插值(见图 1(c))。对于上述混合单元, 优化问题(7)中的第 1 个约束方程可以离散为

$$\mathbf{B}^T \hat{\sigma} = \sum_{k=1}^{N_s} A_k^s (\mathbf{B}_k^s)^T \sigma_k = \mathbf{F}_0 + \alpha \cdot \mathbf{F} \quad (12)$$

考虑平面应变问题下的 Mohr-Coulomb 屈服准则, 即

$$F = \sqrt{s_{xx}^2 + s_{xy}^2} + \sigma_m \sin \varphi - c \cos \varphi \leq 0 \quad (13)$$

式中:  $\sigma_m$  为平均主应力, 对于平面问题有  $\sigma_m = (\sigma_x + \sigma_y)/2$ ;  $s_{xx}$ 、 $s_{xy}$  为应力偏张量  $\mathbf{s}_{ij}$  的分量,  $\mathbf{s}_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij}$ 。

每个光滑域内应力的 Mohr-Coulomb 屈服准则约束可以表述成如下二阶锥形式<sup>[4]</sup>:

$$\left. \begin{aligned} z_k + \sigma_{m,k} \sin \varphi_k &= c_k \cos \varphi_k \\ \text{s.t.} \\ z_k &\geq \sqrt{(s_{xx}^k)^2 + (s_{xy}^k)^2} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式中:  $c_k$  和  $\varphi_k$  为光滑域  $k$  内的黏聚力和内摩擦角;  $z_k$  为非负的辅助变量, 当应力到达屈服面后, 式(14)取等号, 此时  $z_k$  相当于等效偏应力, 具有应力量纲。因此, 第  $k$  个光滑域内的基本未知量包括:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{z}_k &= [z_k \quad \sigma_{m,k} \quad s_{xx,k} \quad s_{xy,k}]^T \\ \sigma_k &= [\sigma_x^k \quad \sigma_y^k \quad \tau_{xy}^k]^T, \mathbf{s}_k = [\sigma_m^k \quad s_{xx}^k \quad s_{xy}^k]^T \\ \sigma_k &= \mathbf{Q} \mathbf{s}_k, \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

优化问题(7)可以离散为如下的标准 SOCP 问题:

$$\left. \begin{aligned} \max \quad & [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \alpha \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix} \\ \text{s.t.} \\ & \begin{bmatrix} -\mathbf{F} & \mathbf{K}_B \\ 0 & \mathbf{K}_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} \\ & \mathbf{Z} \in \mathcal{K}_q \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式中:  $\mathcal{K}_q$  表示二阶锥约束,

$$\mathcal{K}_q = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^m \mid x_1 \geq \sqrt{\sum_{j=2}^m x_j^2} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Z} &= [\mathbf{z}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{z}_{N_s}]^T \\ \mathbf{K}_B &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \underbrace{A_1^s (\mathbf{B}_1^s)^T \mathbf{Q}}_1 & \cdots & \mathbf{0} & \underbrace{A_{N_s}^s (\mathbf{B}_{N_s}^s)^T \mathbf{Q}}_{N_s} \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_D &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{D}_{N_s} \end{bmatrix}, \mathbf{D}_k = [1 \quad \sin \varphi_k \quad 0 \quad 0] \\ \mathbf{k} &= [c_k \cos \varphi_k \quad \cdots \quad c_{N_s} \cos \varphi_{N_s}]^T \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

式中:  $\mathbf{R}^m$  为  $m$  维实数向量。在优化理论中, 式(16)就是所谓的齐次原对偶问题<sup>[14]</sup>, 其对偶问题为

$$\left. \begin{aligned} \min \quad & \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0^T & \mathbf{k}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} -\mathbf{F}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_B^T & \mathbf{K}_D^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} + \mathbf{s}_n^x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ & \mathbf{s}_n^x \in \mathcal{K}_q \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

式中:  $\mathbf{y}_1$ 、 $\mathbf{y}_2$  和  $\mathbf{s}_n^x$  是式(16)中变量的对偶变量。令

$$\mathbf{y}_1 = -\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{y}_2 = [A_1^s \lambda_1 \quad \cdots \quad A_{N_s}^s \lambda_2]^T \quad (20)$$

式中:  $\mathbf{U}$  为节点速度向量;  $\lambda_k$  为光滑域  $k$  内的非负塑性乘子。当优化问题(16)存在最优解, 即满足 KKT 条件 (Karush-Kuhn-Tucker conditions)<sup>[15, 35, 40]</sup> 时, 对偶问题(19)可以进一步简化为

$$\left. \begin{aligned} \min \quad & \sum_{k=1}^{N_s} k_k \lambda_k A_k^s - \mathbf{F}_0^T \hat{\mathbf{u}} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{F}^T \hat{\mathbf{u}} = 1 \\ & a_k \lambda_k = \theta_k \\ & \lambda_k \geq \sqrt{(e_{11}^k)^2 + (e_{12}^k)^2} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

式中:  $k_k = c_k \cos \varphi_k$ ;  $a_k = \sin \varphi_k$ ;  $\theta_k$ 、 $e_{11}^k$ 、 $e_{12}^k$  分别为第  $k$  个光滑域内的体积应变和偏应变

$$\begin{bmatrix} \theta_k \\ e_{11}^k \\ e_{12}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x^k + \boldsymbol{\varepsilon}_y^k \\ \boldsymbol{\varepsilon}_x^k - \boldsymbol{\varepsilon}_y^k \\ \gamma_{xy}^k \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x^k \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y^k \\ \gamma_{xy}^k \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{B}}_k^s \hat{\mathbf{u}} \quad (22)$$

可以发现, 式(21)就是在 SFEM 中广泛采用的基于速度场的上限值<sup>[12, 23, 28]</sup>。

### 2.3 施加速度边界条件

优化问题 (16) 以光滑域内的应力作为基本未知量, 这导致无法直接施加速度边界条件。根据 Zhang<sup>[41]</sup>、Wang 等<sup>[42]</sup>的方法, 引入位移边界点的节点反力向量:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{n+1} &= [f_{1x} \ f_{1y} \ \cdots \ f_{dx} \ f_{dy}]^T \\ \dot{\mathbf{u}}_0 &= [u_{1x} \ u_{1y} \ \cdots \ u_{dx} \ u_{dy}]^T \end{aligned} \quad (23)$$

并构造泛函:

$$L = \alpha + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \nabla(\mathbf{u}) d\Omega - \alpha \mathbf{F}^T \mathbf{u} - \mathbf{F}_0^T \mathbf{u} + \mathbf{r}_{n+1}^T \mathbf{u}_0 - (\mathbf{E}_u \mathbf{r}_{n+1})^T \mathbf{u} \quad (24)$$

其中, 对节点反力  $\mathbf{r}$  求偏导, 有

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_{n+1}} = (\dot{\mathbf{u}}_0)^T - \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{E}_u = 0 \Rightarrow \mathbf{E}_u^T \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_0 \quad (25)$$

式中:  $\mathbf{E}_u$  为选择矩阵, 将局部编号下的节点反力向量恢复为整体编号下的节点反力向量。从式 (25) 可以看出, 泛函 (24) 的极值条件包含了速度边界条件, 优化问题 (16) 可以进一步写为

$$\begin{aligned} \max \quad & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dot{\mathbf{u}}_0^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \mathbf{Z} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} -\mathbf{F} & \mathbf{K}_B & -\mathbf{E}_u \\ 0 & \mathbf{K}_D & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \mathbf{Z} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} \\ & \mathbf{Z} \in \mathcal{K}_q \end{aligned} \quad (26)$$

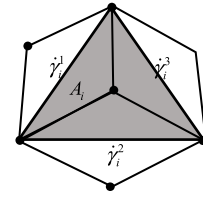
本文采用商业优化软件 Mosek (网址为 <https://www.mosek.com>) 中的原对偶内点算法求解优化问题 (26), 其原问题的解中可以获得极限荷载乘子和极限状态下的应力场, 其对偶解中可以获取塑性乘子和运动许可速度场。

### 3 网格自适应加密方案

极限分析的自适应加密算法一般由误差估计指标和网格加密算法两部分组成。本文采用最大塑性剪应变率作为后验误差估计指标, 然后再采用开源软件 Triangle<sup>[43]</sup> 进行网格自适应加密。单元内的最大塑性应变率指标定义为

$$\dot{\gamma}_i = \int_A \dot{\gamma}_{\max} dA, \quad \dot{\gamma}_{\max} = \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \quad (27)$$

对于本文方法, 单元内的最大塑性应变率可由单元所在光滑域内的最大塑性剪应变率平均得到 (如图 2 所示):



$$\dot{\gamma}_i = A_i \cdot \frac{1}{3} (\dot{\gamma}_i^1 + \dot{\gamma}_i^2 + \dot{\gamma}_i^3)$$

图 2 单元  $i$  内最大塑性剪应变率计算方法

Fig.2 Calculation of maximum strain rate in  $i$ -th element

$$\dot{\gamma}_i = A_i \cdot \frac{1}{3} (\dot{\gamma}_i^1 + \dot{\gamma}_i^2 + \dot{\gamma}_i^3) \quad (28)$$

式中:  $A_i$  为单元  $i$  的面积;  $\dot{\gamma}_i^1$ 、 $\dot{\gamma}_i^2$ 、 $\dot{\gamma}_i^3$  分别为与单元  $i$  相关的 3 个边光滑域内的最大塑性剪应变率。Triangle 根据每个单元的面积约束进行网格加密, 因此, 上述指标需要转换为单元的面积约束。首先, 定义整个问题域的平均最大塑性应变率为

$$D = \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} \dot{\gamma}_i A_i \quad (29)$$

式中:  $N_e$  表示三角形单元的个数。这样, 每个单元的面积约束可以表述为<sup>[12]</sup>

$$A_{\text{New}, i} = \begin{cases} \theta \frac{D}{\dot{\gamma}_i} (0 \leq \theta \leq 1) & \text{if } \theta \frac{D}{\dot{\gamma}_i} < A_i \\ A_i & \text{if } \theta \frac{D}{\dot{\gamma}_i} \geq A_i \end{cases} \quad (30)$$

式中:  $A_{\text{New}, i}$  为用于 Triangle 软件进行网格自适应加密的面积约束。考虑上述网格自适应加密算法后, 本文方法的计算流程如图 3 所示。

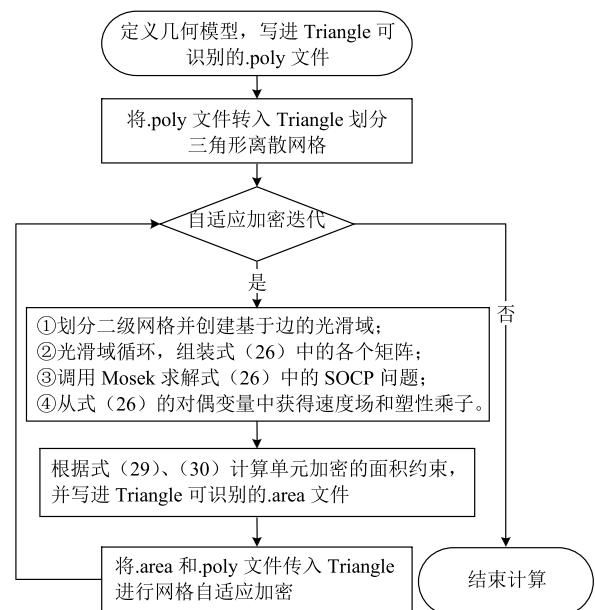


图 3 本文方法的计算流程图

Fig.3 Flow chart of the proposed method

## 4 数值算例

本节以边坡稳定问题为例, 将本文方法的计算结果与解析解或参考解对比, 来验证新方法的收敛性、精度和效率。文中所有程序均在 Windows 7 (配置: 2.70 GHz CPU, 1 processors, 2 cores, 4 GB RAM) MATLAB 2019b 环境下实现和运行。

### 4.1 无重量承受垂直载荷的边坡

如图 4 所示, 由黏-摩擦性材料构成的均质无重量边坡, 坡顶承受一个均匀分布的垂直载荷  $q$ 。此时, 坡顶能承受的极限垂直载荷  $q_{\lim}$  可以由滑移线场理论导出<sup>[44]</sup>:

$$q_{\lim} = c \cot \varphi \cdot \left\{ \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \exp[(\pi - 2\chi) \tan \varphi] - 1 \right\} \quad (31)$$

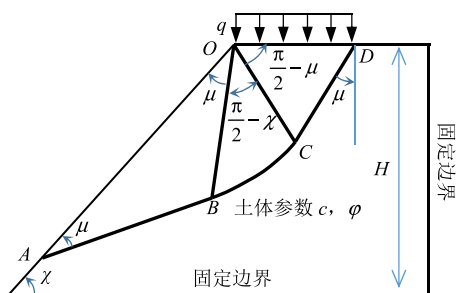


图 4 几何模型

Fig.4 Geometry model

根据滑移线理论, 边坡在极限载荷  $q_{\lim}$  作用下的破坏模式如图 4 所示,  $AB$  和  $CD$  为直线、 $BC$  为以  $OB$ 、 $OC$  为界限的对数螺旋面, 塑性区由主动楔形区  $ODC$ 、剪切区  $BCO$  及被动楔形区  $ABO$  构成。我们取边坡参数为  $c = 10$  kPa,  $\varphi = 20^\circ$ ,  $\chi = 60^\circ$ , 根据式 (31) 可以计算出此时的极限垂直荷载的解析解为  $q_{\lim} = 54.5625$  kPa。图 5 展示了本文方法计算的极限荷载随着网格自适应加密时的收敛过程。随着网格自适应加密, 本文方法能迅速收敛到精确解, 自适应迭代 8 步后的计算结果为  $q_{\lim} = 54.5739$  kPa, 与解析解的相对误差仅有 0.021%。

图 6 展示了自适应迭代八步后的加密网格和运动许可速度场。图 7 展示了滑移线场和最大塑性剪应变率等值线图。从两幅图中可以看出, 本文方法得到的自适应加密网格、塑性应变率的等值线的分布与滑移线场吻合很好。图 8 展示了不同土体参数情况下, 坡顶垂直极限荷载的解析解和本文方法求解得到的数值解, 两者基本吻合。由此可见, 新方法不仅可以得到高精度的数值解, 还可以准确捕捉到边坡的破坏模式。

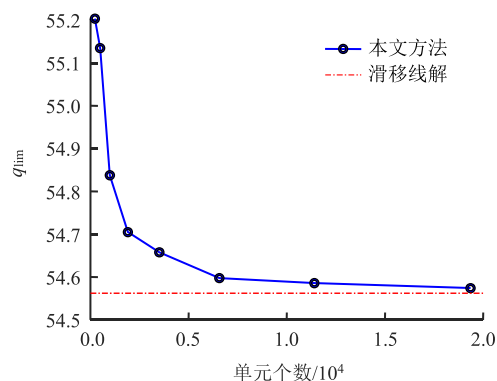


图 5 网格自适应加密时极限荷载的收敛过程

Fig.5 Convergence progress of the limit load with mesh adaptive refinement

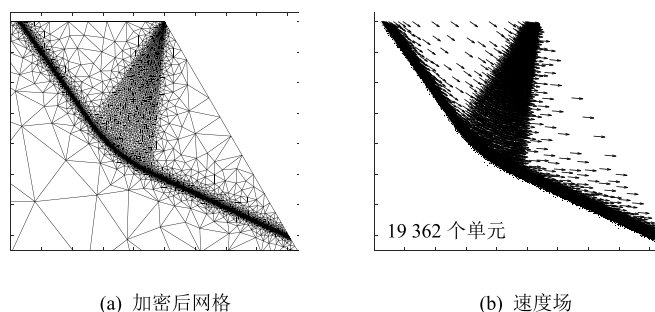


图 6 自适应加密后的网格和速度场

Fig.6 Mesh and velocity field after adaptive refining

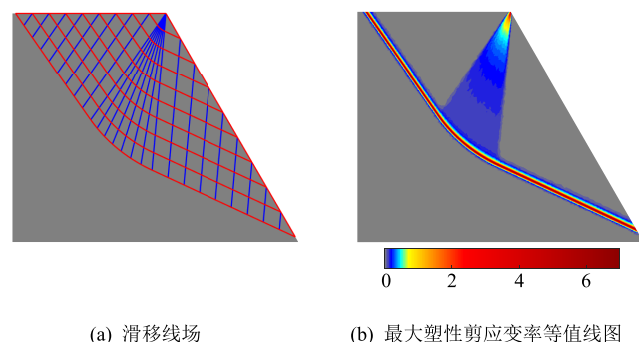


图 7 滑移线场和最大塑性剪应变率的等值线图

Fig.7 Slip line and contour of maximum shear strain rate

### 4.2 二维边坡稳定性分析

#### 4.2.1 不同方法之间的对比

考虑如图 9 所示的均质边坡, 坡高为  $H$ 、坡角为  $\beta$ , 土体的内摩擦角和黏聚力为  $c$  和  $\varphi$ 。该问题的极限状态可由无量纲稳定数  $N = \gamma H/c$  来评估。取  $H = 10$  m,  $\beta = 70^\circ$ ,  $c = 10$  kPa,  $\varphi = 20^\circ$ , Chen<sup>[2]</sup>和 Makrodimopoulos 等<sup>[4]</sup>先后给出了该问题的参考上限解  $N^U = 8.30$  和下限解  $N^L = 8.21$ 。

下面采用本文方法分析该问题, 我们同时采用文献[4]中的有限元下限法、文献[22]中的基于

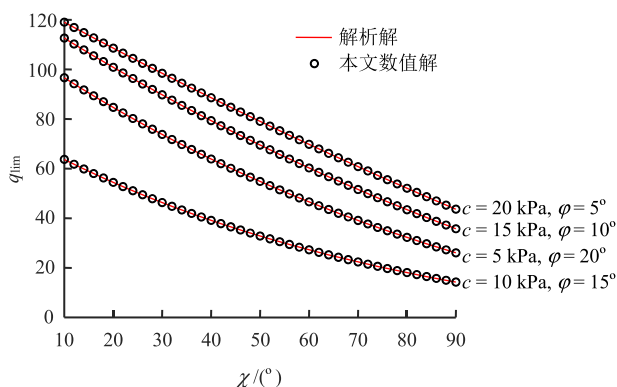


图 8 解析解和本文数值解的对比  
Fig.8 Comparison between analytical solution and numerical solution

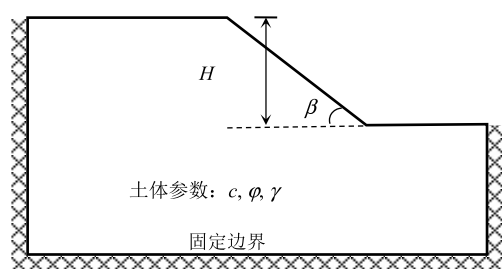


图 9 几何模型  
Fig.9 Geometry model

sESFEM 和速度场的上限法和文献[3]中基于六节点高阶单元和速度场的上限法, 作为补充方法来进行对比分析。其中, 文献[4]中有限元下限法和文献[3]中基于六节点高阶单元和速度场的上限法是目前广泛采用并认可的能获得严格上限解和下限解的数值方法。

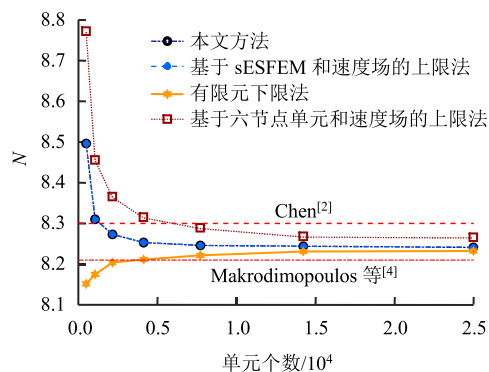
图 10(a)展示了不同方法随着网格自适应加密时的收敛情况。在网格自适应加密的过程中, 其余两种方法采用本文方法得到的加密网格进行计算, 不同方法的最终计算结果统计在表 1 中。图 10(b)统计了网格加密过程中不同方法的 Mosek 求解时间。结果显示, 随着网格的自适应加密, 本文方法迅速收敛到精确解, 并且始终大于下限法获得的数值解。本文方法在计算效率和精度上都高于六节点单元, 并且随着问题规模的增大, 本文方法计算效率的优势越明显。式 (16) ~ (22) 已经证明本文方法和基于速度场的上限法是等价的, 因此, 基于 sESFEM 和速度场的上限法和本文方法获得了相同的结果, 但本文方法提高了近一半的计算效率。图 11 展示了自适应加密迭代 8 步后的网格和运动许可速度场。自适应加密后的网格在塑性区十分密集, 在刚性区保持稀疏。这样的网格加密方式在保证计算效率的同时, 显著提高数值精度和收敛速度。图 12

表 1 不同方法最终计算结果的对比

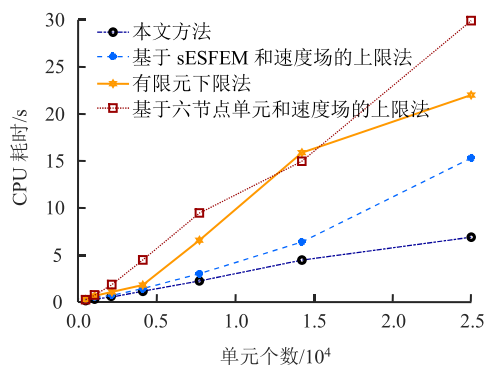
Table 1 Comparison of calculated results by different methods

| 方法                 | $N$   | CPU 耗时/s |
|--------------------|-------|----------|
| 本文方法               | 8.242 | 6.8      |
| 有限元下限法             | 8.232 | 22.0     |
| 基于 sESFEM 和速度场的上限法 | 8.242 | 15.3     |
| 基于六节点单元和速度场的上限法    | 8.264 | 30.0     |

注: CPU 耗时指 Mosek 求解器的计算时间。



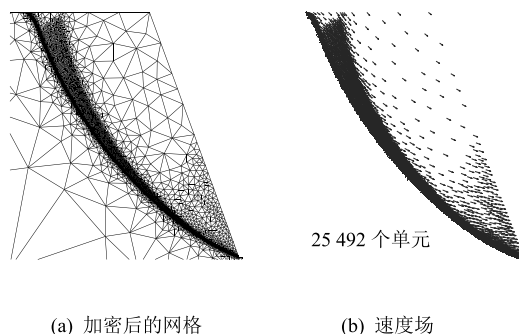
(a) 收敛过程



(b) 求解耗时

图 10 不同方法计算极限荷载的收敛过程和 Mosek 的求解耗时

Fig.10 The convergency of the limit load and Mosek CPU costs of different method



(a) 加密后的网格

(b) 速度场

图 11 自适应加密后的网格和速度场

Fig.11 Mesh and velocity field after adaptive refining

展示了本文方法和基于六节点单元的方法计算得到的最大塑性剪应变率的等值线图。两者计算得到的等值线图相似，但本文方法计算的塑性能量耗散更集中在塑性剪切带上。图 13 对比了本文方法和传统有限元下限法计算得到的云图，两种方法都采用图 11(a)中的自适应加密网格进行计算。本文方法获得的结构极限状态下的应力场和有限元下限法的计算结果是一致的。

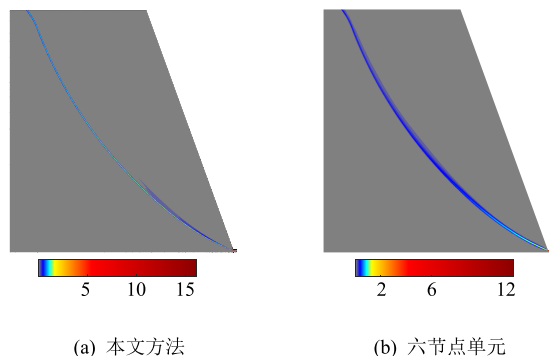


图 12 最大塑性剪应变率的等值线图  
Fig.12 Contour of maximum strain rate

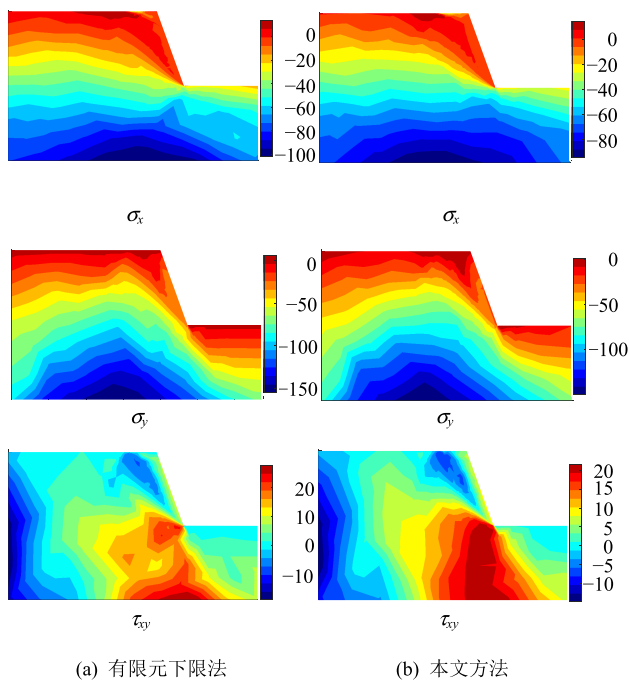


图 13 有限元下限法和本文方法的应力场等值线图  
(单位: kPa)

Fig.13 Contour of stress field obtained by the lower bound limit analysis and the present stress-based upper bound limit analysis(unit: kPa)

#### 4.2.2 含软弱夹层边坡的安全系数

强度折减法<sup>[45]</sup>是获取边坡稳定性系数的一种常用方法，根据折减系数 SRF 对土体强度参数进行折减。

$$c' = \frac{c}{\text{SRF}}, \quad \phi' = \arctan\left(\frac{\tan \phi}{\text{SRF}}\right) \quad (32)$$

当边坡达到极限状态时，对应的折减系数即为边坡的安全系数 (FOS)。对于极限分析，边坡的重力极限荷载乘子  $\alpha = 1$  时为极限状态<sup>[46]</sup>。本文中，我们采用如图 14 所示的二分法来搜索边坡的安全系数。

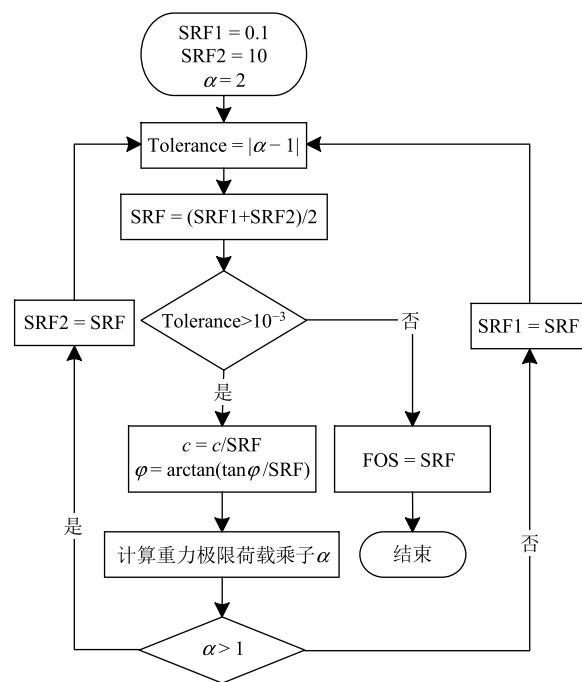


图 14 基于二分法搜索安全系数  
Fig.14 Binary search algorithm

考虑图 15 所示的含软弱夹层的土质边坡，该算例是检验边坡稳定性分析的数值方法的一个标准算例<sup>[47]</sup>。本文方法计算得到的安全系数为 1.265，文献 [48] 中采用极限分析和 PLAXIS 弹塑性强度折减法的分析结果分别为 1.27 和 1.20。本文方法计算结果处于文献 [48] 中极限分析和 PLAXIS 的计算结果之间。其中，PLAXIS 由于采用了非关联流动法则，其计算结果低于极限分析的计算结果。图 16 为折减系数等于安全系数时，本文方法计算得到的自适应加

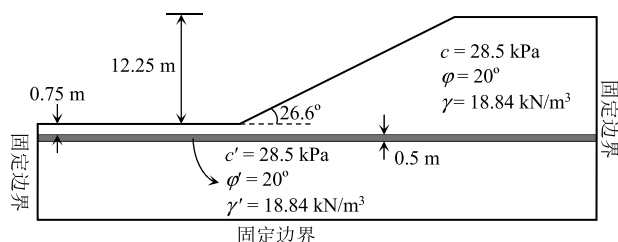


图 15 含软弱夹层的土质边坡  
Fig.15 Soil slope with weak layer

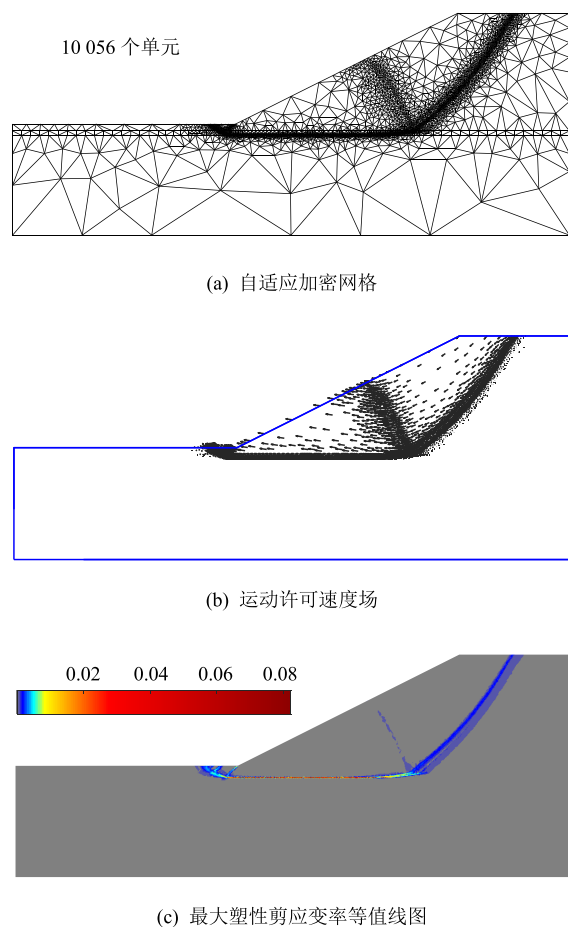


图 16 分析结果  
Fig.16 Analysis results

密网格、运动许可速度场和最大塑性剪应变率图。结果显示塑性能量耗散主要集中在软弱夹层上，边坡沿着软弱面发生滑移破坏。

## 5 结 论

本文在 sESFEM 的基础上，提出了一种混合常应力-光滑应变单元，用于离散极限分析的广义变分原理，并基于最大剪应变率提出适用于此类混合单元的自适应加密算法。经过边坡稳定分析发现：应变光滑技术的引入，显著改善了三节点常应变单元的性能，本文提出的混合单元自适应算法不仅可以提高计算精度和效率，还可以得到与滑移线场吻合的破坏模式。此外通过对比分析发现，在相同离散网格情况下，文中的新方法在计算效率和精度上均优于六节点单元的计算结果。同时，新方法得到的极限状态下的应力场和传统下限法计算的结果是一致的，即新方法可以同时获得极限状态下结构速度场和应力场的信息。

目前本文方法仅局限于二维问题和 Mohr-

Coulomb 屈服准则，将本文方法推广到三维模型和更多的屈服准则将是我们下一步的工作重点。

## 参 考 文 献

- [1] DRUCKER D C, PRAGER W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design[J]. **Quarterly of Applied Mathematics**, 1952, 10: 157-165.
- [2] CHEN W F. Limit analysis and soil plasticity[M]. Elsevier: Amsterdam, 1975.
- [3] MAKRODIMOPOULOS A, MARTIN C M. Upper bound limit analysis using simplex strain elements and second-order cone programming[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 2007, 31(6): 835-865.
- [4] MAKRODIMOPOULOS A, MARTIN C M. Lower bound limit analysis of cohesive-frictional materials using second-order cone programming[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2006, 66(4): 604-634.
- [5] SLOAN S W. Upper bound limit analysis using finite elements and linear programming[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 1989, 13(3): 263-282.
- [6] LIU Y H, ZHANG X F, CEN Z Z. Lower bound shakedown analysis by the symmetric Galerkin boundary element method[J]. **International Journal of Plasticity**, 2005, 21(1): 21-42.
- [7] ZHANG X, LIU Y, ZHAO Y, et al. Lower bound limit analysis by the symmetric Galerkin boundary element method and the complex method[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2002, 191(17): 1967-1982.
- [8] SMITH C, GILBERT M. Application of discontinuity layout optimization to plane plasticity problems[J]. **Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, 2007, 463(2086): 2461-2484.
- [9] 贾苍琴, 黄齐武, 王贵和. 边坡稳定分析的非连续面拓扑优化技术[J]. **岩土工程学报**, 2018, 40(4): 655-664.  
JIA Cang-qin, HUANG Qi-wu, WANG Gui-he. Slope stability using discontinuity topology optimization technique[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2018, 40(4): 655-664.
- [10] 周书涛, 刘应华, 陈莘莘. 基于自然单元法的极限上限

- 分析[J]. 固体力学学报, 2012, 33(1): 39-47.
- ZHOU Shu-tao, LIU Ying-hua, CHEN Shen-shen. Upper-bound limit analysis based on the natural element method[J]. **Chinese Journal of Solid Mechanics**, 2012, 33(1): 39-47.
- [11] LE C V, GILBERT M, ASKES H. Limit analysis of plates using the EFG method and second-order cone programming[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2009, 78(13): 1532-1552.
- [12] MOHAPATRA D, KUMAR J. Kinematic limit analysis for clays with anisotropy and different strengths in compression and tension[J]. **Computers and Geotechnics**, 2020, 126: 103713.
- [13] KRABBENHØFT K, LYAMIN A V, SLOAN S W. Formulation and solution of some plasticity problems as conic programs[J]. **International Journal of Solids and Structures**, 2007, 44(5): 1533-1549.
- [14] ANDERSEN E D, ROOS C, TERLAKY T. On implementing a primal-dual interior-point method for conic quadratic optimization[J]. **Mathematical Programming**, 2003, 95(2): 249-277.
- [15] KRABBENHØFT K, LYAMIN A V, SLOAN S W, et al. An interior-point algorithm for elastoplasticity[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2007, 69: 592-626.
- [16] 郑宏, 张谭, 王秋生. 弹塑性有限元分析中几个难点问题的一揽子方案[J]. 岩土力学, 2021, 42(2): 301-314.
- ZHENG Hong, ZHANG Tan, WANG Qiu-sheng. One package of schemes for some difficult issues in finite element plasticity analysis[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2021, 42(2): 301-314.
- [17] ZHENG H, LIU F, DU X L. Complementarity problem arising from static growth of multiple cracks and MLS-based numerical manifold method[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2015, 295: 150-171.
- [18] 张谭, 郑宏, 林珊. Mohr-Coulomb 准则的弹塑性积分方法[J]. 济南大学学报(自然科学版), 2021, 35(2): 190-197.
- ZHANG Tan, ZHENG Hong, LIN Shan. Elastoplastic integral algorithm for Mohr-Coulomb criterion[J]. **Journal of University of Jinan (Science and Technology)**, 2021, 35(2): 190-197.
- [19] SLOAN S W, KLEEMAN P W. Upper bound limit analysis using discontinuous velocity fields[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 1995, 127(1-4): 293-314.
- [20] 杨昕光, 迟世春. 基于非线性破坏准则的土坡稳定有限元上限分析[J]. 岩土工程学报, 2013, 35(6): 1759-1764.
- YANG Xin-guang, CHI Shi-chun. Upper bound FEM analysis of slope stability using a nonlinear failure criterion[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2013, 35(6): 1759-1764.
- [21] LIU G R, NGUYEN T T. Smoothed finite element methods[M]. Boca Raton: Taylor & Francis, 2010.
- [22] NGUYEN-XUAN H, WU C T, LIU G R. An adaptive selective ES-FEM for plastic collapse analysis[J]. **European Journal of Mechanics**, 2016, 58: 278-290.
- [23] NGUYEN-XUAN H, LIU G R. An edge-based finite element method (ES-FEM) with adaptive scaled-bubble functions for plane strain limit analysis[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2015, 285: 877-905.
- [24] CHEN J S, WU C T, YOON S, et al. A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2001, 50(2): 435-466.
- [25] LIU G R, DAI K Y, NGUYEN T T. A smoothed finite element method for mechanics problems[J]. **Computational Mechanics**, 2007, 39(6): 859-877.
- [26] LIU G R, ZHANG G Y. Edge-based smoothed point interpolation methods[J]. **International Journal of Computational Methods**, 2008, 5(4): 621-646.
- [27] LIU G R, NGUYEN-THOI T, NGUYEN-XUAN H, et al. A node-based smoothed finite element method (NS-FEM) for upper bound solutions to solid mechanics problems[J]. **Computers and Structures**, 2009, 87(1-2): 14-26.
- [28] LE C V, NGUYEN-XUAN H, ASKES H, et al. A cell-based smoothed finite element method for kinematic limit analysis[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2010, 83(12): 1651-1674.
- [29] WU C T, HU W. A two-level mesh repartitioning scheme for the displacement-based lower-order finite element methods in volumetric locking-free analyses[J]. **Computational Mechanics**, 2012, 50(1): 1-18.
- [30] LIU G R, NGUYEN-THOI T, LAM K Y. A novel alpha finite element method ( $\alpha$ FEM) for exact solution to mechanics problems using triangular and tetrahedral elements[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2008, 197(45): 3883-3897.

- [31] NGUYEN-XUAN H, LIU G R. An edge-based smoothed finite element method softened with a bubble function (bES-FEM) for solid mechanics problems[J]. **Computers and Structures**, 2013, 128: 14-30.
- [32] ZENG W, LIU G R, JIANG C, et al. A generalized beta finite element method with coupled smoothing techniques for solid mechanics[J]. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 2016, 73: 103-119.
- [33] ANDERHEGGEN E, KNÖPFEL H. Finite element limit analysis using linear programming[J]. **International Journal of Solids and Structures**, 1972, 8: 1413-1431.
- [34] BORGES L A, ZOUAIN N, HUESPE A E. A non-linear optimization procedure for limit analysis[J]. **European Journal of Mechanics**, 1996, 15(3): 487-512.
- [35] KRABBENHOFT K, LYAMIN A V, HJIAJ M, et al. A new discontinuous upper bound limit analysis formulation[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2005, 63(7): 1069-1088.
- [36] NASH S G, SOFER A. Linear and nonlinear programming[M]. New York: McGraw-Hill, 1996.
- [37] BORGES L, ZOUAIN N, COSTA C, et al. An adaptive approach to limit analysis[J]. **International Journal of Solids and Structures**, 2001, 38(10-13): 1707-1720.
- [38] CIRIA H, PERAIRE J, BONET J. Mesh adaptive computation of upper and lower bounds in limit analysis[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2008, 75(8): 899-944.
- [39] MARTIN C M. The use of adaptive finite-element limit analysis to reveal slip-line fields[J]. **Géotechnique Letters**, 2011, 1(2): 23-29.
- [40] KRABBENHØFT K. A variational principle of elastoplasticity and its application to the modeling of frictional materials[J]. **International Journal of Solids and Structures**, 2009, 46(3-4): 464-479.
- [41] ZHANG X, SHENG D, SLOAN S W, et al. Lagrangian modelling of large deformation induced by progressive failure of sensitive clays with elasto-viscoplasticity: simulation of progressive failure of sensitive clays[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2017, 112(8): 963-989.
- [42] WANG L, ZHANG X, ZANIBONI F, et al. Mathematical optimization problems for particle finite element analysis applied to 2D landslide modeling[J]. **Mathematical Geosciences**, 2021, 53(1): 81-103.
- [43] SHEWCHUK J R. Delaunay refinement algorithms for triangular mesh generation[J]. **Computational Geometry**, 2002, 22(1-3): 21-74.
- [44] 陈祖煜. 土力学经典问题的极限分析上、下限解[J]. **岩土工程学报**, 2002, 24(1): 1-11.  
CHEN Zu-yu. Limit analysis for the classic problems of soil mechanics[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2002, 24(1): 1-11.
- [45] DAWSON E M, ROTH W H, DRESCHER A. Slope stability analysis by strength reduction[J]. **Géotechnique**, 1999, 49(6): 835-840.
- [46] LIU F T, ZHAO J D. Limit analysis of slope stability by rigid finite-element method and linear programming considering rotational failure[J]. **International Journal of Geomechanics**, 2013, 13(6): 827-839.
- [47] DONALD I B, GIAM PSK. Soil slope stability programs review[M]. [S. l.]: Association for Computer Aided Design (Australia), 1989.
- [48] SLOAN S W. Geotechnical stability analysis[J]. **Géotechnique**, 2013, 63(7): 531-571.